

# アルミ板温度制御モデルに対する熱伝導率の推定

○矢納 陽 (岡山大学) 内田茂樹 (品川リフラクトリーズ株式会社) 細谷直紀  
見浪 護 松野隆幸 (岡山大学)

## Estimation of Thermal Conductivity for Temperature Control Model of an Aluminum Plate

\*A. Yanou (Okayama Univ.), S. Uchida (Shinagawa Refractories Co., Ltd.), N. Hosoya, M. Mamoru and T. Matsuno (Okayama Univ.)

**Abstract**– This paper reports an estimation result of thermal conductivity for temperature control model of an aluminum plate. In this paper, a temperature control model of aluminum plate is discretized and the parameter identification is executed through Kalman filter. The numerical simulation shows that the derived controller based on the identified parameters can control the temperature of aluminum plate model and the thermal conductivity can be estimated on-line.

**Key Words:** Thermal conductivity, Estimation, Temperature control

### 1 はじめに

プロセス産業において温度制御は製品品質を決定する重要な要素の一つである。また目標値追従性の向上や、制御対象の特性変動に対応しつつより良い制御結果を得るための方法の一つとして、入出力データから制御対象のパラメータを推定し、その結果をコントローラに反映して制御を行うことが挙げられる<sup>1)</sup>。また、熱を伝える媒体の物理量として熱伝導率が定義されている。熱伝導率の測定方法には熱線法、熱流法といったものがあり、測定対象物(制御対象)の熱伝導率をオフラインで取得することができる<sup>2)</sup>。熱伝導率は温度とともに変化するため<sup>3)</sup>、目標値変更や外乱等によって制御対象の熱伝導率も変化する。このような場合、オフラインで取得したデータを利用して制御対象のモデルを再構築すれば、制御性能を維持することが期待できる。

しかし、オフラインで取得できるデータには測定範囲(熱伝導率を測定できる温度の範囲)があるため、この範囲を超えた場合は制御対象のモデルが構築できない。さらに、制御対象の経年劣化に伴い、取得済みのデータと実際の熱伝導率が異なってくる可能性がある。言い換えれば、制御性能の劣化を招く可能性がある。すなわち、より良い制御結果を得るためには、前述の通りパラメータのオンライン推定結果とコントローラを組み合わせた制御系を構成することが望ましい。

そこで本研究ではカルマンフィルタ<sup>4)</sup>を用いた熱伝導率の推定結果について報告する。具体的には、アルミ板温度制御実験装置のモデルを離散化し、得られたモデルに対してカルマンフィルタを組み入れたコントローラを構成する。数値シミュレーションによって、制御系を構成しつつ熱伝導率のオンライン推定が行えることを示す。

### 2 熱伝導率の推定

#### 2.1 アルミ板温度制御実験装置のモデル

Fig.1 で示す実験装置のモデルとして Fig.2 を考える。Fig.2 に示す部位  $x_1$ ,  $x_2$  の温度に関する状態量を  $i = 1, 2$  に対しつぎのように定義する。



Fig. 1: Aluminum plate thermal process

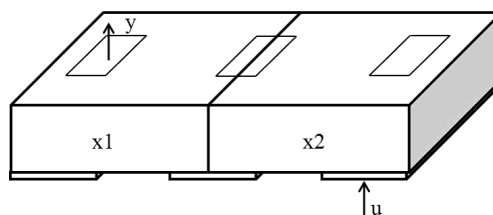


Fig. 2: Aluminum plate model

$$x_i = T_i - T_0$$

ここで  $T_i$  は各部位の温度,  $T_0$  は室温を表す。つぎに熱伝導に関する以下の3つの法則を用いることでモデル化を行う。

熱伝導に関するフーリエの法則:

$$q = -\lambda_f(d\theta/dn)$$

ここで  $q$  は熱流束 [ $W/m^2$ ],  $\lambda_f$  は熱伝導率 [ $W/mK$ ],  $d\theta/dn$  は熱流の温度傾斜 [ $K/m$ ] を表す。

熱伝達とニュートンの冷却法則:

$$q = \alpha(\theta_s - \theta_f)$$

ここで  $\alpha$  は熱伝達率 [ $W/m^2K$ ] を表す。

さらに、熱伝導に関して以下の法則が成り立つ。

$$dQ = mc \cdot d\theta$$

ここで  $dQ$  は熱量 [ $J$ ],  $c$  は比熱 [ $J/kgK$ ],  $m$  は質量 [ $kg$ ],  $d\theta$  は温度変化 [ $K$ ] を表す。以上をもとに、制御対象の

Table 1: Aluminum plate model parameters

Density of aluminum	: 2700 [kg/m <sup>3</sup> ]
Specific heat of aluminum	: 917 [J/kgK]
Heat transfer coefficient	: 25 [W/m <sup>2</sup> K]
Thermal conductivity	: 238 [W/mK]
Width of plate	: 250 [mm]
Thickness of plate	: 10 [mm]
Length of plate	: 120 [mm]
Output range of heater	: 40 [W]

モデルに与える入力を  $u$  とおくと, Fig.2 の各部位の温度変化に関する式はつぎのように与えられる.

$$mc \frac{d(T_1 - T_0)}{dt} = -\{\alpha(T_1 - T_0)S_1 + \lambda_f \frac{T_1 - T_2}{d} S_2\}$$

$$mc \frac{d(T_2 - T_0)}{dt} = -\{\alpha(T_2 - T_0)S_1 + \lambda_f \frac{T_2 - T_1}{d} S_2\} + u$$

$m$ ,  $S_1$  はそれぞれ部位  $x_1$ ,  $x_2$  の質量, 外気との接触総表面積を表し,  $S_2$ ,  $d$  は部位  $x_1$ ,  $x_2$  の接触面積とそれぞれの部位の横幅を表す. また, アルミ板温度制御実験装置のパラメータを Table 1 に示す.

先に定義した状態量を利用して温度変化に関する式を状態空間表現すると以下で与えられる.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{mc} \begin{bmatrix} -(\alpha S_1 + \frac{\lambda_f S_2}{d}) & \frac{\lambda_f S_2}{d} \\ \frac{\lambda_f S_2}{d} & -(\alpha S_1 + \frac{\lambda_f S_2}{d}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mc} \end{bmatrix} u$$

サンプリング時間を  $\Delta t$  とおき,  $\frac{dx_i}{dt} \approx \frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}$  のように近似できると仮定すれば, 上式はつぎのように表すことができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$  である.  $y(t)$  は部位  $x_1$  の周囲温度からの温度変化の値であり, 制御対象の出力とする. また, 各係数は以下で与えられる.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Delta t}{mc}(\alpha S_1 + \frac{\lambda_f S_2}{d}) & \frac{\lambda_f S_2 \Delta t}{mcd} \\ \frac{\lambda_f S_2 \Delta t}{mcd} & 1 - \frac{\Delta t}{mc}(\alpha S_1 + \frac{\lambda_f S_2}{d}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t}{mc} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \ 0]$$

すると Fig.2 のモデルは以下のように伝達関数表現できる.

$$y(t) = \frac{z^{-k_m} B[z^{-1}]}{A[z^{-1}]} u(t) \quad (1)$$

ここで  $A[z^{-1}]$ ,  $B[z^{-1}]$  は  $a = \frac{\alpha S_1 \Delta t}{mc} - 1$ ,  $b = \frac{2S_2 \Delta t}{mcd}$ ,  $c = (\frac{\Delta t}{mc})^2 \cdot \frac{S_2}{d}$  とおくと以下のように書ける.

$$A[z^{-1}] = 1 + (b\lambda_f + 2a)z^{-1} + (ab\lambda_f + a^2)z^{-2} \quad (2)$$

$$B[z^{-1}] = c\lambda_f, \quad k_m = 2 \quad (3)$$

## 2.2 カルマンフィルタによる熱伝導率の推定

前節で得たモデル (1) を過去の入出力データ (回帰ベクトル)  $\boldsymbol{\psi}(t)$  とパラメータベクトル  $\boldsymbol{\theta}$  で表現することによって, カルマンフィルタが利用できるようにする. すなわち

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(t) &= [-y(t-1), -y(t-2), u(t-2)]^T \\ \boldsymbol{\theta} &= [a_1, a_2, b_0]^T \end{aligned}$$

とおき, 制御対象の出力は  $y(t) = \boldsymbol{\psi}^T(t)\boldsymbol{\theta}$  のように表される. なお  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$  はそれぞれ  $A[z^{-1}]$ ,  $B[z^{-1}]$  の係数であり, ここでは以下のように与えている.

$$a_1 = b\lambda_{f1} + 2a \quad (4)$$

$$a_2 = ab\lambda_{f2} + a^2 \quad (5)$$

$$b_0 = c\lambda_{f3} \quad (6)$$

上式の  $\lambda_{f1}$ ,  $\lambda_{f2}$  および  $\lambda_{f3}$  は,  $A[z^{-1}]$ ,  $B[z^{-1}]$  の当該の項ではすべて  $\lambda_f$  としているが, 本論文では  $a_1$ ,  $a_2$  および  $b_0$  の推定結果から計算できる  $\lambda_{f1}$ ,  $\lambda_{f2}$  および  $\lambda_{f3}$  の平均値を, 制御対象の熱伝導率  $\lambda_f$  として定義する.

以上の準備のもと,  $\sigma_w^2$  を制御対象に加わる白色雑音の分散と考え, つぎの式で与えられるカルマンフィルタを用いてパラメータ推定を行う. さらに, 得られた推定値を用いて次章で示すコントローラを設計し, 制御系を構成する.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t-1) + \frac{\boldsymbol{\Gamma}(t-1)\boldsymbol{\psi}(t)}{\sigma_w^2 + \boldsymbol{\psi}^T(t)\boldsymbol{\Gamma}(t-1)\boldsymbol{\psi}(t)} \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(t) = \boldsymbol{\Gamma}(t-1) - \frac{\boldsymbol{\Gamma}(t-1)\boldsymbol{\psi}(t)\boldsymbol{\psi}^T(t)\boldsymbol{\Gamma}(t-1)}{\sigma_w^2 + \boldsymbol{\psi}^T(t)\boldsymbol{\Gamma}(t-1)\boldsymbol{\psi}(t)} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(0) = \gamma \mathbf{I}, \quad 0 < \gamma < \infty$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = y(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T(t-1)\boldsymbol{\psi}(t) \quad (9)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = [\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \hat{b}_0(t)]^T \quad (10)$$

## 3 既約分解法を用いた一般化予測制御法

前章で得たモデルに対して, パラメータ推定値が真値に収束したと仮定してコントローラを導出する.

### 3.1 一般化予測制御則の最適サーボ系

まず制御対象の偏差系に対して予測式を求める. 制御対象が安定かつ定常状態で出力が目標値  $r$  と一致したと仮定する. このとき定常状態の出力  $y_\infty$  と入力  $u_\infty$  の関係はつぎのように与えられる.

$$A[z^{-1}]y_\infty = z^{-k_m} B[z^{-1}]u_\infty$$

これら定常値からの偏差を  $\tilde{y}(t) = y(t) - y_\infty$ ,  $\tilde{u}(t) = u(t) - u_\infty$  と定義し, 次の偏差系を構成する.

$$A[z^{-1}]\tilde{y}(t) = z^{-k_m} B[z^{-1}]\tilde{u}(t) \quad (11)$$

上式に対し, 以下の Diophantine 方程式を用いて予測式を導出する.

$$1 = A[z^{-1}]E_j[z^{-1}] + z^{-j}F_j[z^{-1}]$$

$$E_j[z^{-1}]B[z^{-1}] = R_j[z^{-1}] + z^{-j}S_j[z^{-1}]$$

$E_j[z^{-1}]$ ,  $F_j[z^{-1}]$ ,  $R_j[z^{-1}]$  および  $S_j[z^{-1}]$  は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} E_j[z^{-1}] &= 1 + e_1 z^{-1} + \dots + e_{j-1} z^{-(j-1)} \\ F_j[z^{-1}] &= f_0^j + f_1^j z^{-1} + \dots + f_{n-1}^j z^{-(n-1)} \\ R_j[z^{-1}] &= r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_{j-1} z^{-(j-1)} \\ S_j[z^{-1}] &= s_0 + s_1^j z^{-1} + \dots + s_{m-1}^j z^{-(m-1)} \end{aligned}$$

これらを用いると時刻  $t+j$  における出力はつぎのようになる.

$$\hat{y}(t+j) = R_j[z^{-1}]\tilde{u}(t+j-k_m) + h_j(t)$$

ここで

$$h_j(t) = F_j[z^{-1}]\hat{y}(t) + S_j[z^{-1}]\tilde{u}(t-k_m)$$

外乱が存在しないと仮定すると,  $j$  ステップ先の予測式は  $\hat{y}(t+j|t) = \hat{y}(t+j)$  と表せる. そこで, 予測式をベクトル形式でまとめて書くことつぎのように表せる.

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{H}$$

ただし

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}} &= [\hat{y}(t+N_1|t) \dots \hat{y}(t+N_2|t)]^T \\ \tilde{\mathbf{U}} &= [\tilde{u}(t) \dots \tilde{u}(t+N_u-1)]^T \\ \mathbf{H} &= [h_{N_1}(t) \dots h_{N_2}(t)]^T \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} r_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ r_{N_2-1} & \dots & r_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$[N_1, N_2]$  は予測ホライズン,  $[1, N_u]$  は制御ホライズンを表す. つぎに  $\hat{y}(t+j|t)$  を用いて制御則を導出するため, 式 (11) の偏差系に対し以下の評価関数を考える.

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=N_1}^{N_2} \tilde{y}^2(t+j) + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \tilde{u}^2(t+j-1) \\ &= (\mathbf{R}\tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{H})^T (\mathbf{R}\tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{H}) + \lambda \tilde{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{U}} \quad (12) \end{aligned}$$

ここで  $\lambda$  は入力の重み係数である. 評価関数  $J$  を  $\tilde{\mathbf{U}}$  に関して最小化すると次式が得られる.

$$\tilde{\mathbf{U}} = -(\mathbf{R}^T \mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{H}$$

これは入力の偏差系列の式であるので, 時刻  $t$  で適用される制御則はつぎのように求められる.

$$u(t) = H_0(z^{-1})r - F_0(z^{-1})y(t) \quad (13)$$

ここで

$$\begin{aligned} H_0(z^{-1}) &= \frac{F_p[z^{-1}] + (1 + z^{-k_m} S_p[z^{-1}])K}{1 + z^{-k_m} S_p[z^{-1}]} \\ F_0(z^{-1}) &= \frac{F_p[z^{-1}]}{1 + z^{-k_m} S_p[z^{-1}]}, \quad K = \frac{A[1]}{B[1]} \\ [p_{N_1}, \dots, p_{N_2}] &= [1, 0, \dots, 0](\mathbf{R}^T \mathbf{R} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R}^T \\ F_p[z^{-1}] &= \sum_{j=N_1}^{N_2} p_j F_j[z^{-1}] \\ S_p[z^{-1}] &= \sum_{j=N_1}^{N_2} p_j S_j[z^{-1}] \end{aligned}$$

### 3.2 既約分解法を用いたコントローラの拡張

既約分解法を用いてコントローラ (13) を拡張する. まず伝達関数の既約分解表現では, 安定有理関数の族  $RH_\infty$  を考える.

$$RH_\infty = \{G(z^{-1}) = \frac{G_n[z^{-1}]}{G_d[z^{-1}]}, G_d[z^{-1}] : \text{安定多項式}\}$$

制御対象の伝達関数を以下のように既約分解表現する.

$$\begin{aligned} y(t) &= G(z^{-1})u(t) \\ &= N(z^{-1})D^{-1}(z^{-1})u(t) \quad (14) \end{aligned}$$

$N(z^{-1})$ ,  $D(z^{-1})$  は  $RH_\infty$  に属するものとし,  $X(z^{-1})$ ,  $Y(z^{-1})$  を以下の Bezout 等式の解とする.

$$X(z^{-1})N(z^{-1}) + Y(z^{-1})D(z^{-1}) = 1 \quad (15)$$

ただし

$$X(z^{-1}), Y(z^{-1}) \in RH_\infty$$

式 (14), (15) よりすべての安定化補償器は  $U(z^{-1})$ ,  $K(z^{-1}) \in RH_\infty$  として以下の形で与えられる<sup>5)</sup>.

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1(z^{-1})r - C_2(z^{-1})y(t) \quad (16) \\ C_1(z^{-1}) &= (Y(z^{-1}) - U(z^{-1})N(z^{-1}))^{-1}K(z^{-1}) \quad (17) \\ C_2(z^{-1}) &= (Y(z^{-1}) - U(z^{-1})N(z^{-1}))^{-1} \\ &\quad \cdot (X(z^{-1}) + U(z^{-1})D(z^{-1})) \quad (18) \end{aligned}$$

ここで式 (13) で得られる閉ループ特性多項式を  $T[z^{-1}]$  とおき, これが安定に設計されたと仮定すると制御対象の既約分解表現は以下のように与えられる.

$$N(z^{-1}) = \frac{z^{-k_m} B[z^{-1}]}{T[z^{-1}]}, \quad D(z^{-1}) = \frac{A[z^{-1}]}{T[z^{-1}]}$$

式 (13) と式 (16)~(18) を比較して,  $X(z^{-1})$ ,  $Y(z^{-1})$ ,  $K(z^{-1})$ ,  $U(z^{-1})$  をつぎのように定めると, Bezout 等式 (15) を満たす. すなわち式 (13) の既約分解表現が得られる.

$$\begin{aligned} X(z^{-1}) &= F_p[z^{-1}] \\ Y(z^{-1}) &= 1 + z^{-k_m} S_p[z^{-1}] \\ K(z^{-1}) &= F_p[z^{-1}] + (1 + z^{-k_m} S_p[z^{-1}])K \\ U(z^{-1}) &= 0 \end{aligned}$$

また  $U(z^{-1}) \in RH_\infty$  に対して閉ループ系は

$$y(t) = N(z^{-1})K(z^{-1})r \quad (19)$$

と表すことができる. さらに  $U(z^{-1}) \neq 0$  を新たな設計パラメータとしてコントローラ (13) を拡張するため, 本論文では  $U(z^{-1})$  を以下の式で与え, 制御系として強安定系の構成を試みるものとする<sup>6)</sup>.

$$U(z^{-1}) = -D^{-1}(1)X(1) \quad (20)$$

## 4 数値シミュレーション

サンプリング時間  $\Delta t$  を 10 秒として制御対象のモデルの離散化を行う。このとき Fig.2 に示すアルミ板温度制御実験装置のモデル (1) は、入力  $u(t)$  をヒータのワット数 [W], 出力  $y(t)$  をアルミ板の部位  $x_1$  における温度変化 [°C] として以下のように与えられる。

$$A[z^{-1}] = 1 - 1.847z^{-1} + 0.849z^{-2}$$

$$B[z^{-1}] = 0.0017$$

一般化予測制御法の設計パラメータは制御系が安定となるよう  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = N_u = 10$ ,  $\lambda = 0.01$  とした。ここで、シミュレーション時間は 3000 秒とし、平均 0、分散  $0.002^2$  の白色雑音が出来に加わるものとする。なお、シミュレーションではモデルパラメータのノミナル値を上式で与えた真値  $\times 0.8$  としてパラメータ推定を行う。また、入力の上下限値を  $0 \leq u(t) \leq 40$  としている。目標値は室温 (アルミ板の初期温度) からの温度差  $r = 10[^\circ\text{C}]$  である。以上の条件のもとで、数値シミュレーション結果を Fig.3, Fig.4, Fig.5 および Fig.6 に示す。それぞれ、パラメータ推定結果、熱伝導率の推定結果、出力および入力のグラフを表している。

Fig.3 より、モデルパラメータ  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_0$  の推定値がほぼ真値に収束していることが分かる。また、本論文では各モデルパラメータに含まれている  $\lambda_{f1}$ ,  $\lambda_{f2}$  および  $\lambda_{f3}$  の平均値を熱伝導率の推定値  $\lambda_f$  と定義しているが、Fig.4 より、推定値  $\lambda_f$  が Table 1 で与えている熱伝導率の真値に収束することを確認できた。さらに、Fig.5, Fig.6 より、前章で与えたコントローラによって目標値追従が果たされていることを確認できる。以上より、制御系を構成しつつ熱伝導率のオンライン推定が行えることを確認した。

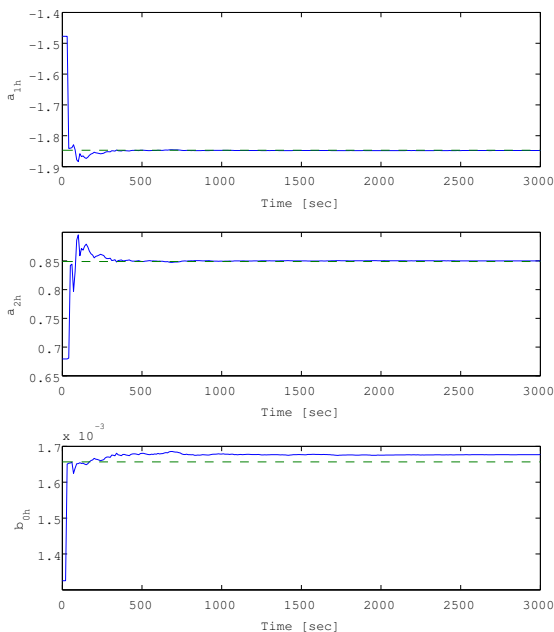


Fig. 3: Identified parameters

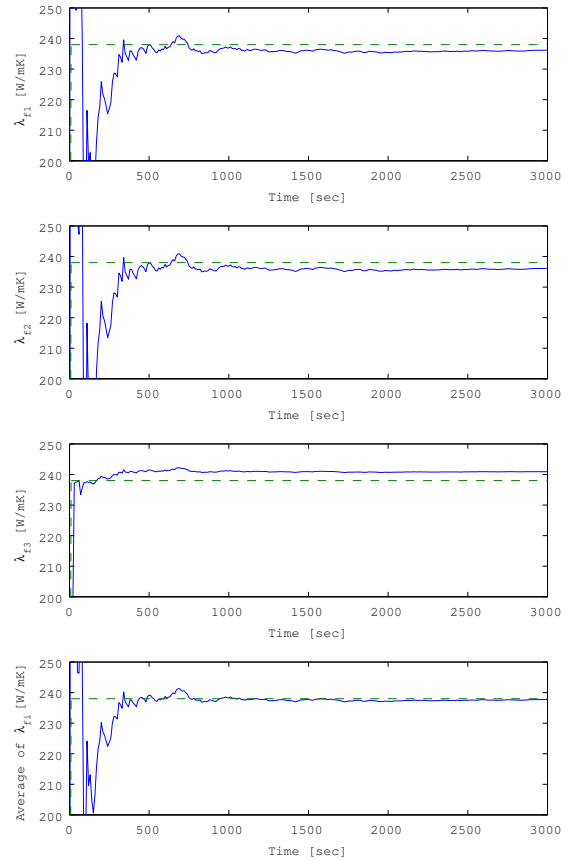


Fig. 4: Thermal conductivity

## 5 おわりに

本研究ではアルミ板温度制御実験装置の離散時間モデルに対する熱伝導率の推定結果について報告した。シミュレーション結果から、カルマンフィルタによって熱伝導率のパラメータをオンラインで推定できることを確認した。さらに、カルマンフィルタを組み入れたコントローラが目標値追従を達成することを確認した。今後は断熱れんがなど熱伝導率の小さな対象物に対しても熱伝導率のオンライン推定に取り組んでいく。

## 参考文献

- 1) Akira Yanou, Mamoru Minami and Takayuki Matsuno, Extended Self-tuning Generalized Predictive Control with Computation Reduction Focused on Closed-loop Characteristics, Proc. of the 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, 51/56 (2013)
- 2) <http://www.jisc.go.jp/app/pager?id=942958>
- 3) 京セラ株式会社ファインセラミック事業本部, Characteristics of Kyocera Technical Ceramics, 京セラ株式会社 (2014)
- 4) 足立修一, 丸田一郎, カルマンフィルタの基礎, 東京電機大学出版局 (2012)
- 5) M. Vidyasagar, Control System Synthesis, A Factorization Approach, MIT Press (1985)
- 6) 岡崎聡, 西崎純基, 矢納陽, 見浪護, Mingcong Deng, 閉ループ特性に着目した強安定予測制御系, 計測自動制御学会論文集, 47-7, 317/325 (2011)

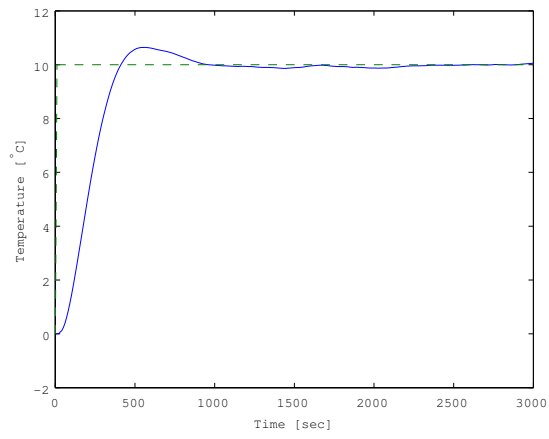


Fig. 5: Plant output

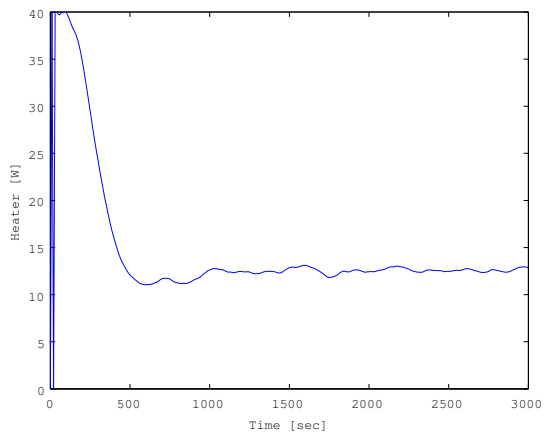


Fig. 6: Plant input

- 7) 矢納陽, 岡崎聡, 西崎純基, 増田士朗, 見浪護, 斎藤誠二,  
 2自由度一般化予測制御法のアルミ板温度制御実験への  
 応用, 電気学会論文誌C (電子・情報・システム部門誌),  
**132-6**, 879/885 (2012)