

# 平面型アルミ板温度制御実験モデルに対する2自由度一般化予測制御法の適用 Application of Two Degree-of-Freedom Generalized Predictive Control to Thermal Model for Two Dimensional Aluminum Plate

岡山大学 ○ 細谷 直紀, 矢納 陽, 見浪 護, 松野 隆幸

Okayama Univ. Hosoya Naoki, Yanou Akira, Minami Mamoru and Matsuno Takayuki

**Abstract** This paper considers an application of two degree-of-freedom generalized predictive control (Two DOF GPC) to the model of temperature control experimental device of planar aluminum plate. In our research, Two DOF GPC can achieve to design the output response for the aluminum plate model with modeling error or disturbance, and without them independently. The present study aims at three-dimensional temperature control by expanding the model of the one-dimensional aluminum plate into three-dimensional one in order to develop thermotherapy machine and to produce products which are made from thermoplastic materials. Therefore, this paper firstly constructs two-dimensional aluminum plate model for temperature control by extending the conventional model. Moreover, the simulation result with temperature control of the derived model by using Two DOF GPC is shown.

## 1 緒言

一般化予測制御 (Generalized Predictive Control:GPC) は化学プラントなど産業分野において広く用いられている制御手法である。これまでの研究ではアルミ板温度制御モデルに対し、一般化予測制御法を2自由度構成することで、モデル化誤差や外乱が存在しない場合の目標値応答と、それらが存在する場合の目標値応答を独立させて調整できるようになった。しかし、これまでの研究ではシミュレーションにおいて1次元の熱の拡がりのみ考慮したモデルを使用していたため、産業分野への応用に対して十分なものであるとは言えなかった。そこで熱可塑性素材の製品生産や、医療分野における温熱治療器の開発に向け、実環境と同様に3次元の熱の拡がりを考慮したモデルの構築を目指す。そのため本研究では、まず従来のモデルを拡張して2次元平面への熱の拡がりを考えたアルミ板温度制御モデルを構築する。さらに得られたモデルに対し、2自由度一般化予測制御法を適用し、温度制御シミュレーションを行った。

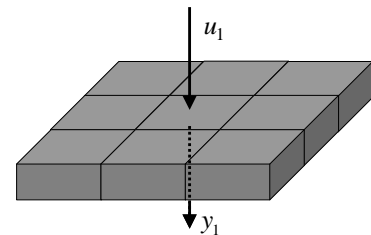


図 1: Model of aluminum plate

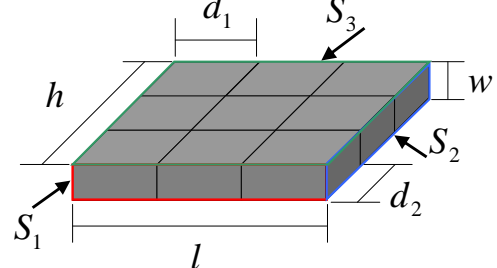


図 2: Model of Parameter

## 2 問題設定

### 2.1 アルミ板二次元モデルの導出

以下の図のようなモデルを考える。

また、このときのモデルの各パラメータを以下に示す。

アルミニウムの密度: $\rho = 2700[\text{kg}/\text{m}^3]$
アルミニウムの比熱: $c = 0.917[\text{kJ}/\text{kgK}]$
アルミニウムの熱伝達率: $\alpha = 20[\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$
アルミニウムの熱伝導率: $\lambda = 238[\text{W}/\text{mK}]$
板の横幅・縦幅: $l = 250[\text{mm}]$
板の厚さ: $w = 10[\text{mm}]$

まず、状態変数を以下のように置く

$$x_n = T_n - T_o \quad (1)$$

今回は縦に3分割, 横に3分割の9次元モデルなので,  $n = 1, 2, \dots, 9$  とし, 左上から右に,  $n = 1, 2, \dots, 9$  とする.  $T_n$  はアルミ板の各部位の温度,  $T_o$  は室温とする.

次に, 以下に熱伝導に関する法則を示す.

熱伝導に関するフーリエの法則

$$q = -\lambda_f \frac{d\theta}{dn} \quad (2)$$

熱伝導とニュートンの冷却法則

$$q = h(\theta_s - \theta_f) \quad (3)$$

熱伝導の法則

$$dQ = mcd\theta \quad (4)$$

ここで  $q$  は熱流速 [W/m<sup>2</sup>],  $\lambda_f$  は熱伝導率 [W/mK],  $d\theta/dn$  は熱流の温度傾斜 [K/m],  $h$  は熱伝達率 [W/m<sup>2</sup>K],  $c$  は比熱 [J/kgK],  $m$  は各部位の質量 [kg] となっている. 以上の式 (2)(3)(4) の法則と式 (1) の状態変数より以下の熱伝導微分方程式が得られる.

$$m_1 c \frac{dx_1}{dt} = - \left\{ k \left( \frac{1}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2 + \frac{2}{9} S_3 \right) + \lambda_f \left( \frac{S_1}{d_1} + \frac{S_2}{d_2} \right) \right\} x_1 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_2 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_4$$

$$m_2 c \frac{dx_2}{dt} = - \left\{ k \left( \frac{1}{3} S_1 + \frac{2}{9} S_3 \right) + \lambda_f \left( \frac{S_1}{d_1} + 2 \frac{S_2}{d_2} \right) \right\} x_2 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_1 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_3 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_5$$

$$m_3 c \frac{dx_3}{dt} = - \left\{ k \left( \frac{1}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2 + \frac{2}{9} S_3 \right) + \lambda_f \left( \frac{S_1}{d_1} + \frac{S_2}{d_2} \right) \right\} x_3 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_2 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_6$$

$$m_4 c \frac{dx_4}{dt} = - \left\{ k \left( \frac{1}{3} S_2 + \frac{2}{9} S_3 \right) + \lambda_f \left( 2 \frac{S_1}{d_1} + \frac{S_2}{d_2} \right) \right\} x_4 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_1 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_5 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_7$$

$$m_5 c \frac{dx_5}{dt} = - \left\{ k \left( \frac{2}{9} S_3 \right) + \lambda_f \left( 2 \frac{S_1}{d_1} + 2 \frac{S_2}{d_2} \right) \right\} x_5 + u_1 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_2 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_4 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_6 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_8$$

$$m_6 c \frac{dx_6}{dt} = - \left\{ k \left( \frac{1}{3} S_2 + \frac{2}{9} S_3 \right) + \lambda_f \left( 2 \frac{S_1}{d_1} + \frac{S_2}{d_2} \right) \right\} x_6 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_3 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_5 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_4$$

$$m_7 c \frac{dx_7}{dt} = - \left\{ k \left( \frac{1}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2 + \frac{2}{9} S_3 \right) + \lambda_f \left( \frac{S_1}{d_1} + \frac{S_2}{d_2} \right) \right\} x_7 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_4 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_8$$

$$m_8 c \frac{dx_8}{dt} = - \left\{ k \left( \frac{1}{3} S_1 + \frac{2}{9} S_3 \right) + \lambda_f \left( \frac{S_1}{d_1} + 2 \frac{S_2}{d_2} \right) \right\} x_8 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_5 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_7 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_9$$

$$m_9 c \frac{dx_9}{dt} = - \left\{ k \left( \frac{1}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2 + \frac{2}{9} S_3 \right) + \lambda_f \left( \frac{S_1}{d_1} + \frac{S_2}{d_2} \right) \right\} x_9 + (\lambda_f \frac{S_1}{d_1}) x_6 + (\lambda_f \frac{S_2}{d_2}) x_8$$

## 2.2 二次元モデルの状態空間表現

先ほど得られた式を状態空間表現に表す. この時, 簡略化のため, 各  $x$  についての項をそれぞれ以下のように置き換える.

$$m_1 c \frac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{14} x_4$$

$$m_2 c \frac{dx_2}{dt} = a_{22} x_2 + a_{21} x_1 + a_{23} x_3 + a_{25} x_5$$

$$m_3 c \frac{dx_3}{dt} = a_{33} x_3 + a_{32} x_2 + a_{36} x_6$$

$$m_4 c \frac{dx_4}{dt} = a_{44} x_4 + a_{41} x_1 + a_{45} x_5 + a_{47} x_7$$

$$m_5 c \frac{dx_5}{dt} = a_{55} x_5 + a_{52} x_2 + a_{54} x_4 + a_{56} x_6 + a_{58} x_8$$

$$m_6 c \frac{dx_6}{dt} = a_{66} x_6 + a_{63} x_3 + a_{65} x_5 + a_{69} x_9$$

$$m_7 c \frac{dx_7}{dt} = a_{77} x_7 + a_{74} x_4 + a_{78} x_8$$

$$m_8 c \frac{dx_8}{dt} = a_{88} x_8 + a_{85} x_5 + a_{87} x_7 + a_{89} x_9$$

$$m_9 c \frac{dx_9}{dt} = a_{99} x_9 + a_{96} x_6 + a_{98} x_8$$

上式を状態空間表現にすると, 以下のようになる.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Cx}(k)$$



(12) 式を (13) 式に代入し、 $\tilde{\mathbf{U}}[k]$  に関して偏微分することによって、制御入力は次のように求められる。

$$\tilde{\mathbf{U}}[k] = -(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \Lambda)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{x}}[k]$$

$\mathbf{u}[k]$  は  $\tilde{\mathbf{U}}[k]$  の第 1 要素であることから、制御入力は次のように与えられる。

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{F}_0 \mathbf{x}[k] - \mathbf{F}_0 \mathbf{x}_\infty + \mathbf{u}_\infty \quad (14)$$

ここで

$$\mathbf{F}_0 = -[\mathbf{I}_m \ \mathbf{0}_m \ \cdots \ \mathbf{0}_m](\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \Lambda)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{H}$$

である。また、出力の定常値  $\mathbf{y}_\infty$  が目標値  $\mathbf{r}$  に一致したと仮定すれば (7) 式および (8) 式から  $\mathbf{x}_\infty$ 、 $\mathbf{u}_\infty$  は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_\infty \\ \mathbf{u}_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (15)$$

したがって、(14) 式の右辺第 2 項と第 3 項は次のように計算できる。

$$-\mathbf{F}_0 \mathbf{x}_\infty + \mathbf{u}_\infty = -\{\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{F}_0)^{-1} \mathbf{B}\}^{-1} \mathbf{r}$$

さらに

$$\mathbf{H}_0 = -\{\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{F}_0)^{-1} \mathbf{B}\}^{-1} \quad (16)$$

と定義すれば、制御則は次式で表される。

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{F}_0 \mathbf{x}[k] + \mathbf{H}_0 \mathbf{r} \quad (17)$$

## 4 2 自由度系の構築

GPC の 2 自由度系の構成を与えるため、積分補償を含め入力を以下で表す。

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{F}_0 \mathbf{x}[k] + \mathbf{H}_0 \mathbf{r} + \mathbf{G}_0 \mathbf{z}[k] \quad (18)$$

$z[k]$  が積分補償の項であり、 $G_0$  は試行錯誤によって選ばれるゲインである。しかしこの制御則 (18) 式は、モデル化誤差や外乱の有無にかかわらず定常偏差が 0 となるまで積分が働くため、過渡応答時における目標値への追従の遅れや制御入力量の増加を招く恐れがある。そこでモデル化誤差や外乱が存在する場合のみ積分補償の効果が現れる GPC の 2 自由度系を構成する。また積分器の出力を、目標値と出力の差を  $\mathbf{e}[k] = \mathbf{r} - \mathbf{y}[k]$  として次のように与える。

$$\mathbf{w}[k] = \frac{1}{\Delta} \mathbf{e}[k] \quad (\Delta = 1 - z^{-1}) \quad (19)$$

次にモデル化誤差や外乱が存在しない場合の追従誤差  $\mathbf{e}[k] = \mathbf{r} - \mathbf{y}[k]$  を計算する。この場合、仮定から (19) 式は積分補償を含まない制御則 (17) 式と一致しなければならない。そこで (17) 式を (5) 式に代入し  $\mathbf{x}[k]$  を両辺から減じると以下の式が得られる。

$$\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k] = (\mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{F}_0) \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{H}_0 \mathbf{r}$$

よって

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k] &= (\mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{F}_0)^{-1} \mathbf{x}[k+1] - (\mathbf{A} - \mathbf{I} \\ &\quad + \mathbf{B}\mathbf{F}_0)^{-1} \mathbf{x}[k] - (\mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{F}_0)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{H}_0 \mathbf{r} \end{aligned} \quad (20)$$

上式を  $\mathbf{e}[k]$  に代入し (16) 式を用いると以下の関係を得る。

$$\mathbf{e}[k] = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{F}_0)^{-1} (\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k])$$

すなわちモデル化誤差や外乱が存在しない場合、追従誤差による積分器出力は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'[k] &= \frac{1}{\Delta} \mathbf{e}[k] \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{F}_0)^{-1} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}_0) (\mathbf{x}[k] - \mathbf{x}[0]) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで  $\mathbf{w}'[0] = 0$  とする。この (21) 式は外乱等が存在しない場合の積分補償量を表しているので、GPC を 2 自由度構成するための積分補償項  $\mathbf{z}[k]$  は以下の式で与えられる。

$$\mathbf{z}[k] = \mathbf{w}[k] - \mathbf{w}'[k]$$

この式より、モデル化誤差や外乱が存在しない場合は常に  $\mathbf{z}[k] = 0$  となり積分補償の効果が現れない。以上より、GPC の 2 自由度系を構成する制御則が与えられる。

## 5 予測制御の適用

第 2 章で求めた平面型アルミ板温度制御実験装置モデルに三種類の予測制御系を適用する。このときの制御目標は初期温度より 4[K] 温度を上昇させることである。制御途中で途中で 0.5[K] 温度が上昇する外乱を与えている。

### 5.1 予測制御系のシミュレーション結果

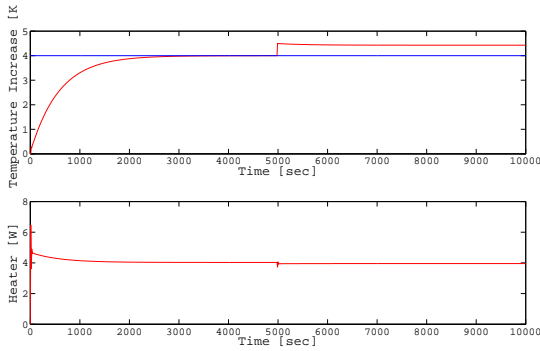


図 3: The Simulate Result with GPC

### 5.2 積分器を加えた予測制御系のシミュレーション結果

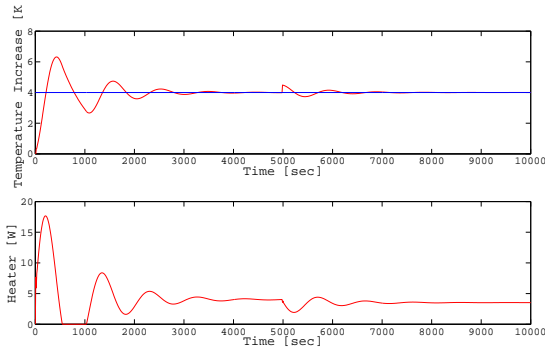


図 4: The Simulate Result with GPC add to Integrator

### 5.3 2自由度一般化予測制御系のシミュレーション結果

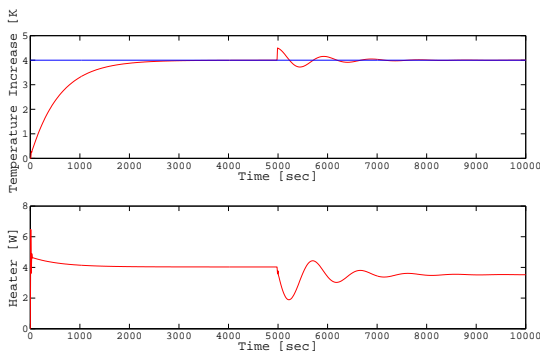


図 5: The Simulate Result with 2DOF-GPC

以上より、モデルに対する予測制御系の適用ができた。先行研究で確認されたように2自由度 GPC コントローラを適用することで外乱が途中で加わっても目標値追従を行うことが出来、かつオーバーシュートを抑えることが出来る。

## 6 モデルの妥当性

モデルの妥当性を確認するために、2章で求めたアルミ板温度制御実験装置モデルに一定の入力を行った際の自由応答を確認する。

以下に、各部位に熱を加えた際の各部位の上昇した温度の結果のグラフを示す。この時、入力熱量は常に一定で  $u = 15[W]$  の熱量を入力している。

また、四隅 ( $n_1, n_3, n_7, n_9$ ) に入力を与えたときの出力、上下左右 ( $n_2, n_4, n_6, n_8$ ) に入力を与えたときの出力はそれぞれ一致することが確認できた。また各グラフの  $Time = 500[s], 1000[s], 4500[s]$  のときの各部位の温度分布を示す。

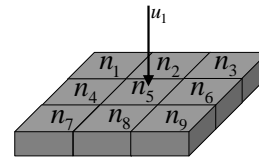


図 6: The Simulation Model of Aluminum

### 6.1 $n_1$ に入力を加えた際のシミュレーション結果

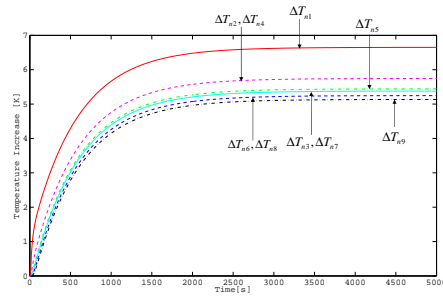


図 7: Temperature Increase(Input the Four-Corners)

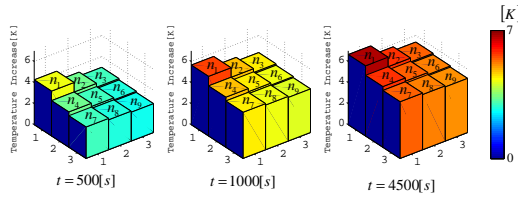


図 8: Temperature Distribution (Input the Four-Corners)

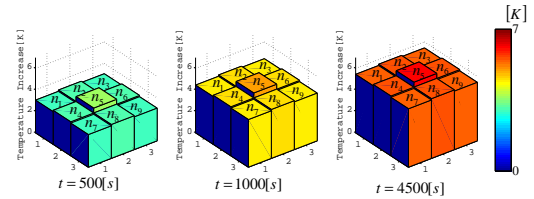


図 12: Temperature Distribution(Input Center)

### 6.2 $n_2$ に入力を加えた際のシミュレーション結果

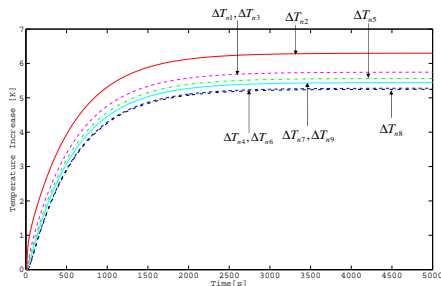


図 9: Temperature Increase(Input Top, Bottom, Left and Right)

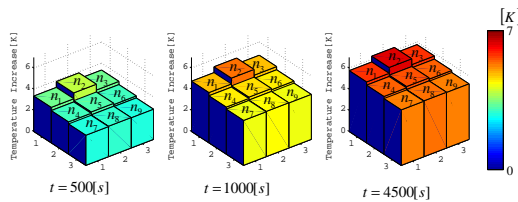


図 10: Temperature Distribution(Input Top, Bottom, Left and Right)

### 6.3 $n_5$ に入力を加えた際のシミュレーション結果

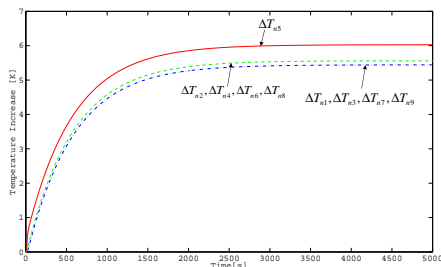


図 11: Temperature Increase(Input Center)

グラフと温度分布のデータより熱を加えた部位より、同心円状に熱が広がっていることが分かる。よって、このモデルは妥当であるといえる。以上より、モデルの妥当性を確認することが出来た。

## 7 結言

本論文では、先行研究で行われていた 1 次元でのアルミ板温度制御実験装置モデルを 2 次元へ拡張し、2 自由度系を構築し、シミュレーションを行った。また、導出したモデルが正しいことを確認するために入出力の関係をグラフ、カラーマップに表示し、妥当性の確認を行った。

今後の課題としては、更に次元拡張を行い、3 次元での立体型アルミ板温度制御実験装置モデルを用いたシミュレーション、現在のモデルは縦に 3 分割、横に 3 分割の 9 分割なので、分割数を増やした際の温度分布の検証が挙げられる。

## 参考文献

- [1] 荒木 翔, 入出力データに基づくアルミ板温度制御実験装置への 2 自由度一般化予測制御法の適用, 岡山大学工学部システム工学科平成 24 年度卒業論文 (2013)
- [2] 大松 繁, 山本 透, セルフチューニングコントロール, コロナ社 pp.25-32(1996)
- [3] 西崎純基, Windup 現象を考慮した 2 自由度一般化予測制御系の設計, 岡山大学大学院自然科学研究科平成 24 年度修士論文 (2013)
- [4] 矢納, 岡崎, 西崎:2 自由度一般化予測制御法のアルミ板温度制御実験への応用, 電気学会論文誌 C(電子・情報・システム部門誌)IEEJ Transaction on Electronics, Information and Systems Vol.132 No.6 pp.879-885(2003)
- [5] 中野 道夫, 美多 勉, 制御基礎理論, 昭晃堂, pp.115-215